

М. А. Алехина, О. Ю. Барсукова

О НЕНАДЕЖНОСТИ СХЕМ ИЗ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ, ПОДВЕРЖЕННЫХ ДВУМ ТИПАМ НЕИСПРАВНОСТЕЙ

Аннотация. *Актуальность и цели.* В современной математике и технике теория синтеза схем из ненадежных функциональных элементов занимает важное место. До сих пор (насколько известно авторам) решались задачи реализации булевых функций надежными схемами в предположении, что функциональные элементы подвержены только одному типу неисправностей (например, инверсные неисправности на выходах элементов или константные неисправности на входах элементов). Эта работа – одна из первых работ, в которой подробно, со всеми доказательствами рассматривается задача синтеза надежных схем с элементами, подверженными неисправностям двух типов. Предполагается, что базисным элементам приписана функция штрих Шеффера (анти-конъюнкция) и базисные элементы в неисправные состояния переходят независимо друг от друга. Первый тип неисправностей характеризуется тем, что при любом входном наборе базисного элемента на его выходе с некоторой вероятностью появляется значение, противоположное конъюнкции входных значений (т.е. имеем инверсные неисправности на выходах). Второй тип неисправностей появляется также на любом входном наборе элемента с некоторой (возможно, отличной от инверсной неисправности) вероятностью и характеризуется тем, что на выходе элемента появляется неопределенность. Отметим также, что в каждый такт работы базисный элемент подвержен только одной из двух названных неисправностей. Цель данной работы: исследовать возможность построения надежных схем, найти метод синтеза надежных схем, получить нетривиальные верхние и нижние оценки ненадежности схем. *Результаты.* Предложен метод повышения надежности схем при описанных неисправностях элементов, доказано, что, во-первых, любую булеву функцию можно реализовать схемой, ненадежность которой асимптотически не больше чем в три раза ненадежности базисного элемента; во-вторых, почти для всех функций (обозначим их множество через K) эта оценка ненадежности не улучшаема, т.е. ненадежность любой схемы, реализующей функцию из множества K , асимптотически меньше чем в три раза ненадежности базисного элемента. Функции множества K описаны явно. *Выводы.* Установлена возможность построения надежных схем при названных неисправностях элементов. Кроме того, найден метод повышения надежности схем и получены верхние и нижние оценки ненадежности схем. Эти оценки оказались асимптотически равными для функций множества K , т.е. почти для всех булевых функций.

Key words: functional elements circuit, unreliable functional elements, probability of error on a circuit output, unreliability of a circuit.

М. А. Alekhina, O. Yu. Barsukova

ON UNRELIABILITY OF FUNCTIONAL ELEMENTS CIRCUITS WITH TWO TYPES OF FAULTS

Abstract. *Background.* In modern mathematics and engineering the theory of circuits synthesis consisting of unreliable functional elements is of much interest. Until now (as far as we know) the problems of the Boolean functions realization using ro-

bust circuits have been solved on the assumption that the functional elements are exposed to only one type of faults (inverse faults at the output or constant faults at the input). This paper is among the first to consider in detail the problem of robust circuits synthesis with two types of faults. It is assumed that the functional elements are assigned to the Sheffer stroke function (disjunction) and the functional elements get faulty independently of each other. The first type of faults is noted for the fact that there is a certain probability of a value opposite to conjunction of the input values at the output (i.e. inverse faults at the output). There a certain probability of the second type faults at any input and the faults are characterized by the uncertainty at the output. It should be also noted that on every stage the functional element is exposed to only one of these two faults. The purpose of this paper is to study the possibility of constructing robust circuits, to find a method of reliable circuit synthesis, to obtain non-trivial upper and lower bounds of the circuits reliability estimation. *Results.* The method of improving reliability of circuits with the described faults has been proposed, and it has been proved that, firstly, any Boolean function can be realized by a circuit, unreliability of which is asymptotically three times no more than unreliability of the functional element, and secondly, this estimation of reliability for almost all functions (the set is denoted by K) cannot be improved, i.e. unreliability of any circuit realizing the function of the K set is asymptotically three times less than unreliability of the functional element. The functions of the K set are explicitly described. *Conclusions.* It is possible to construct reliable circuits with the described faults of elements. Moreover, the method of improving reliability of circuits and obtaining upper and lower bounds for circuit reliability has been found. These estimates were asymptotically equal to the functions of the K set, i.e. for almost all Boolean functions.

Key words: functional elements, unreliable functional elements, probability of faults, unreliability of a circuit.

1. Постановка задачи

Рассмотрим реализацию булевых функций схемами [1] из ненадежных функциональных элементов в полном базисе [2], состоящем из функции штрих Шеффера $h(x_1, x_2) = \overline{x_1 \cdot x_2}$. Обозначим через E_h базисный элемент.

Будем считать, что схема из ненадежных элементов реализует функцию $f(\tilde{x})$ ($\tilde{x} = (x_1, \dots, x_n)$, $n \in N$), если при поступлении на входы схемы набора $\tilde{a}$ при отсутствии неисправностей в схеме на ее выходе появляется значение $f(\tilde{a})$ [3]. Предполагается, что все элементы схемы независимо друг от друга переходят в неисправные состояния двух типов. Неисправность первого типа характеризуется тем, что при поступлении на вход элемента E_h набора (a_1, a_2) в неисправном состоянии на выходе элемента с вероятностью ε ($\varepsilon \in (0, 1/2)$) появляется значение $\overline{h(a_1, a_2)} = a_1 \cdot a_2$ (т.е. имеем инверсные неисправности на выходах элемента). Неисправность второго типа появляется на любом входном наборе элемента с вероятностью δ ($\delta \in (0, 1/2)$) и характеризуется тем, что на выходе элемента появляется значение $*$, $*$ $\notin \{0, 1\}$, которое будем называть неопределенностью. Предполагается, что в каждый такт работы каждый элемент схемы подвержен только одной неисправности. В описанной модели неисправностей функционирование базисного элемента E_h можно описать с помощью табл. 1, где P_0 , P_1 , P_* – вероятности появле-

ния 0, 1, * соответственно на выходе элемента E_h , τ_1 , τ_2 – вероятности появления 0 и 1 соответственно на наборах (1,*), (*,1), (*,*), $\tau_1, \tau_2 \geq 0$.

Таблица 1

$x_1 x_2$	$h(x_1, x_2)$	P_0	P_1	P_*
0 0	1	ε	$1 - \varepsilon - \delta$	δ
0 1	1	ε	$1 - \varepsilon - \delta$	δ
0 *	1	ε	$1 - \varepsilon - \delta$	δ
1 0	1	ε	$1 - \varepsilon - \delta$	δ
1 1	0	$1 - \varepsilon - \delta$	ε	δ
1 *	*	τ_1	τ_2	$1 - \tau_1 - \tau_2$
* 0	1	ε	$1 - \varepsilon - \delta$	δ
* 1	*	τ_1	τ_2	$1 - \tau_1 - \tau_2$
* *	*	τ_1	τ_2	$1 - \tau_1 - \tau_2$

Далее будем считать, что $\varepsilon + \delta \geq \tau_1 + \tau_2$. Тогда (см. табл. 1) ненадежность базисного элемента $P(E_h) = \max\{\varepsilon + \delta, \tau_1 + \tau_2\} = \varepsilon + \delta$.

Пусть схема S реализует функцию $f(\tilde{x})$, входной набор $\tilde{a}$ схемы S такой, что $f(\tilde{a}) = \eta$. Обозначим через $P_{f(\tilde{a}) \neq \eta}(S, \tilde{a})$ вероятность ошибки на выходе схемы S при входном наборе $\tilde{a}$. Тогда $P_{f(\tilde{a}) \neq \eta}(S, \tilde{a}) = P_{\eta}(S, \tilde{a}) + P_*(S, \tilde{a})$.

Входной набор $\tilde{a}$ функции f (а также схемы S , реализующей функцию f) будем называть нулевым, если $f(\tilde{a}) = 0$. Входной набор $\tilde{a}$ функции f (а также схемы S , реализующей функцию f) будем называть единичным, если $f(\tilde{a}) = 1$.

Например, если схема S реализует функцию $f(\tilde{x})$ и входной набор $\tilde{a}$ является нулевым, то вероятность ошибки на выходе схемы S равна $P_{f(\tilde{a}) \neq 0}(S, \tilde{a}) = P_1(S, \tilde{a}) + P_*(S, \tilde{a})$.

Ненадежностью схемы S будем называть число $P(S) = \max\{P_{f(\tilde{a}) \neq \eta}(S, \tilde{a})\}$, где максимум берется по всем входным наборам $\tilde{a}$ схемы S .

2. Верхние оценки ненадежности схем

Теорема 1. Пусть $f(\tilde{x})$ – произвольная функция, S – любая схема, реализующая $f(\tilde{x})$, а $P(S)$ – ненадежность схемы S . Тогда схема $\psi(S)$ (см. рис. 1) реализует функцию $f(\tilde{x})$ с ненадежностью

$$P(\psi(S)) \leq \max\left\{3\varepsilon + 3\delta + 2P^2(S)(1 + \tau_2) + 2\tau_2\delta, \varepsilon + \delta + [\varepsilon + \delta + 2P(S)(1 + \tau_2)]^2\right\}$$

при всех $\varepsilon, \delta, \tau_1, \tau_2$ удовлетворяющих условиям $\varepsilon + \delta \geq \tau_1 + \tau_2$ и $\tau_1 \leq \varepsilon$.

Доказательство. Пусть выполнены условия теоремы. Чтобы получить требуемое неравенство, сначала вычислим вероятности ошибок на выходе схемы B (рис. 1).

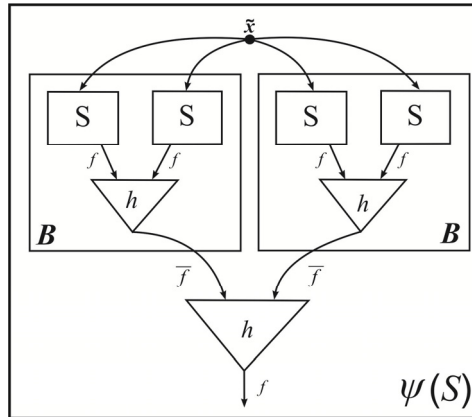


Рис. 1

Если $\tilde{a}$ – нулевой набор функции $f(\tilde{x})$, то при отсутствии неисправностей значение на выходе схемы B (см. рис. 1) равно 1 (поскольку схема B реализует функцию $\bar{f}(\tilde{x})$). Используя формулу полной вероятности, вычислим вероятности появления значений 0, * на выходе схемы B :

$$\begin{aligned} P_0(B, \tilde{a}) = & (1 - P_1(S, \tilde{a}) - P_*(S, \tilde{a}))^2 \varepsilon + 2(1 - P_1(S, \tilde{a}) - P_*(S, \tilde{a}))P_1(S, \tilde{a})\varepsilon + \\ & + P_1^2(S, \tilde{a})(1 - \varepsilon - \delta) + 2(1 - P_1(S, \tilde{a}) - P_*(S, \tilde{a}))P_*(S, \tilde{a})\varepsilon + P_*^2(S, \tilde{a})\tau_1 + \\ & + 2P_1(S, \tilde{a})P_*(S, \tilde{a})\tau_1 \leq \varepsilon + P_1^2(S, \tilde{a}), \text{ так как } \tau_1 \leq \varepsilon; \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} P_*(B, \tilde{a}) = & (1 - P_1(S, \tilde{a}) - P_*(S, \tilde{a}))^2 \delta + 2(1 - P_1(S, \tilde{a}) - P_*(S, \tilde{a}))P_1(S, \tilde{a})\delta + \\ & + P_1^2(S, \tilde{a})\delta + 2(1 - P_1(S, \tilde{a}) - P_*(S, \tilde{a}))P_*(S, \tilde{a})\delta + P_*^2(S, \tilde{a})(1 - \tau_1 - \tau_2) + \\ & + 2P_1(S, \tilde{a})P_*(S, \tilde{a})(1 - \tau_1 - \tau_2) \leq \delta + 2P_1(S, \tilde{a})P_*(S, \tilde{a}) + P_*^2(S, \tilde{a}). \end{aligned} \quad (2)$$

Если $\tilde{a}$ – единичный набор функции $f(\tilde{x})$, то при отсутствии неисправностей значение на выходе схемы B (см. рис. 1) равно 0. Вычислим вероятности появления значений 1, * на выходе схемы B :

$$\begin{aligned} P_1(B, \tilde{a}) = & P_0^2(S, \tilde{a})(1 - \varepsilon - \delta) + 2P_0(S, \tilde{a})(1 - P_0(S, \tilde{a}) - P_*(S, \tilde{a}))(1 - \varepsilon - \delta) + \\ & + (1 - P_0(S, \tilde{a}) - P_*(S, \tilde{a}))^2 \varepsilon + 2P_0(S, \tilde{a})P_*(S, \tilde{a})(1 - \varepsilon - \delta) + 2(1 - P_0(S, \tilde{a}) - \\ & - P_*(S, \tilde{a}))P_*(S, \tilde{a})\tau_2 + P_*^2(S, \tilde{a})\tau_2 \leq \varepsilon + 2P_0(S, \tilde{a}) + 2P_*(S, \tilde{a})\tau_2; \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} P_*(B, \tilde{a}) = & P_0^2(S, \tilde{a})\delta + 2P_0(S, \tilde{a})(1 - P_0(S, \tilde{a}) - P_*(S, \tilde{a}))\delta + (1 - P_0(S, \tilde{a}) - \\ & - P_*(S, \tilde{a}))^2 \delta + 2P_0(S, \tilde{a})P_*(S, \tilde{a})\delta + 2(1 - P_0(S, \tilde{a}) - P_*(S, \tilde{a})) \times \end{aligned}$$

$$\times P_*(S, \tilde{a})(1 - \tau_1 - \tau_2) + P_*^2(S, \tilde{a})(1 - \tau_1 - \tau_2) \leq \delta + 2P_*(S, \tilde{a}). \quad (4)$$

Теперь, используя полученные соотношения, выразим вероятности ошибок на выходе схемы $\psi(S)$ через вероятности ошибок схемы B .

Пусть $\tilde{a}$ – нулевой входной набор схемы S . Тогда $\bar{f}(\tilde{a}) = 1$. Поэтому

$$\begin{aligned} P_1(\psi(S), \tilde{a}) &= P_0^2(B, \tilde{a})(1 - \varepsilon - \delta) + 2P_0(B, \tilde{a})(1 - P_0(B, \tilde{a}) - P_*(B, \tilde{a}))(1 - \varepsilon - \delta) + \\ &+ (1 - P_0(B, \tilde{a}) - P_*(B, \tilde{a}))^2 \varepsilon + 2P_0(B, \tilde{a})P_*(B, \tilde{a})(1 - \varepsilon - \delta) + 2(1 - P_0(B, \tilde{a}) - \\ &- P_*(B, \tilde{a}))P_*(B, \tilde{a})\tau_2 + P_*^2(B, \tilde{a})\tau_2 \leq \varepsilon + 2P_0(B, \tilde{a}) + 2P_*(B, \tilde{a})\tau_2; \\ P_*(\psi(S), \tilde{a}) &= P_0^2(B, \tilde{a})\delta + 2P_0(B, \tilde{a})(1 - P_0(B, \tilde{a}) - P_*(B, \tilde{a}))\delta + (1 - P_0(B, \tilde{a}) - \\ &- P_*(B, \tilde{a}))^2 \delta + 2P_0(B, \tilde{a})P_*(B, \tilde{a})\delta + 2(1 - P_0(B, \tilde{a}) - P_*(B, \tilde{a}))P_*(B, \tilde{a})(1 - \tau_1 - \tau_2) + \\ &+ P_*^2(B, \tilde{a})(1 - \tau_1 - \tau_2) \leq \delta + 2P_*(B, \tilde{a}). \end{aligned}$$

Следовательно, при нулевых входных наборах $\tilde{a}$ вероятность ошибки на выходе схемы $\psi(S)$ с учетом соотношения (1) для $P_1(B, \tilde{a})$ и соотношения (2) для $P_*(B, \tilde{a})$ удовлетворяет неравенству

$$\begin{aligned} P_{f(\tilde{a}) \neq 0}(\psi(S), \tilde{a}) &= P_*(\psi(S), f(\tilde{a})) + P_1(\psi(S), f(\tilde{a})) \leq \varepsilon + \delta + 2(P_*(B, \tilde{a}) + \\ &+ P_0(B, \tilde{a})) + 2P_*(B, \tilde{a})\tau_2 \leq \varepsilon + \delta + 2[\varepsilon + \delta + (P_*(S, \tilde{a}) + P_1(S, \tilde{a}))^2] + \\ &+ 2\tau_2[\delta + 2P_1(S, \tilde{a})P_*(S, \tilde{a}) + P_*^2(S, \tilde{a})] \leq 3\varepsilon + 3\delta + 2P^2(S)(1 + \tau_2) + 2\tau_2\delta. \quad (5) \end{aligned}$$

Пусть $\tilde{a}$ – единичный входной набор схемы S , тогда $\bar{f}(\tilde{a}) = 0$. Поэтому

$$\begin{aligned} P_0(\psi(S), \tilde{a}) &= (1 - P_1(B, \tilde{a}) - P_*(B, \tilde{a}))^2 \varepsilon + 2(1 - P_1(B, \tilde{a}) - P_*(B, \tilde{a}))P_1(B, \tilde{a})\varepsilon + \\ &+ P_1^2(B, \tilde{a})(1 - \varepsilon - \delta) + 2(1 - P_1(B, \tilde{a}) - P_*(B, \tilde{a}))P_*(B, \tilde{a})\varepsilon + P_*^2(B, \tilde{a})\tau_1 + \\ &+ 2P_1(B, \tilde{a})P_*(B, \tilde{a})\tau_1 \leq \varepsilon + P_1^2(B, \tilde{a}); \\ P_*(\psi(S), \tilde{a}) &= (1 - P_1(B, \tilde{a}) - P_*(B, \tilde{a}))^2 \delta + 2(1 - P_1(B, \tilde{a}) - P_*(B, \tilde{a}))P_1(B, \tilde{a})\delta + \\ &+ P_1^2(B, \tilde{a})\delta + 2(1 - P_1(B, \tilde{a}) - P_*(B, \tilde{a}))P_*(B, \tilde{a})\delta + P_*^2(B, \tilde{a})(1 - \tau_1 - \tau_2) + \\ &+ 2P_1(B, \tilde{a})P_*(B, \tilde{a})(1 - \tau_1 - \tau_2) \leq \delta + 2P_1(B, \tilde{a})P_*(B, \tilde{a}) + P_*^2(B, \tilde{a}). \end{aligned}$$

Тогда вероятность ошибки на выходе схемы $\psi(S)$ при единичных входных наборах $\tilde{a}$ удовлетворяет соотношению

$$P_{f(\tilde{a}) \neq 1}(\psi(S), \tilde{a}) = P_*(\psi(S), \tilde{a}) + P_0(\psi(S), \tilde{a}) \leq \varepsilon + \delta + (P_*(B, \tilde{a}) + P_0(B, \tilde{a}))^2.$$

Используя соотношение (3) для $P_0(B, \tilde{a})$ и соотношение (4) для $P_*(B, \tilde{a})$, получим неравенство

$$P_{f(\tilde{a}) \neq 1}(\Psi(S), \tilde{a}) \leq \varepsilon + \delta + \left[\varepsilon + \delta + 2P_*(S, \tilde{a}) + 2P_0(S, \tilde{a}) + 2P_*(S, \tilde{a})\tau_2 \right]^2 \leq \\ \leq \varepsilon + \delta + \left[\varepsilon + \delta + 2P(S)(1 + \tau_2) \right]^2. \quad (6)$$

Из определения ненадежности схемы S следует, что при любом нулевом входном наборе $\tilde{a}$ верно неравенство $P_1(S, \tilde{a}) + P_*(S, \tilde{a}) \leq P(S)$; при любом единичном входном наборе $\tilde{a}$ верно неравенство $P_0(S, \tilde{a}) + P_*(S, \tilde{a}) \leq P(S)$. Учитывая соотношения (5) и (6), получаем неравенство

$$P(\Psi(S)) \leq \max \left\{ 3\varepsilon + 3\delta + 2P^2(S)(1 + \tau_2) + 2\tau_2\delta, \varepsilon + \delta + \left[\varepsilon + \delta + 2P(S)(1 + \tau_2) \right]^2 \right\}.$$

Теорема 1 доказана.

Теорема 2. Любую функцию $f(x_1, \dots, x_n)$ можно реализовать такой схемой C , что $P(C) \leq 4\varepsilon + 4\delta$ при всех $\varepsilon \in (0, 1/260]$, $\delta \in (0, 1/260]$, $\tau_2 \leq 1/260$ и τ_1 , удовлетворяющих неравенствам $\varepsilon + \delta \geq \tau_1 + \tau_2$ и $\tau_1 \leq \varepsilon$.

Доказательство проведем индукцией по числу n переменных функций.

1. Докажем утверждение для $n=1$, т.е. для четырех булевых функций, зависящих от одной переменной: 0, 1, x и $\bar{x}$. Эти функции можно реализовать схемами, изображенными на рис. 2.

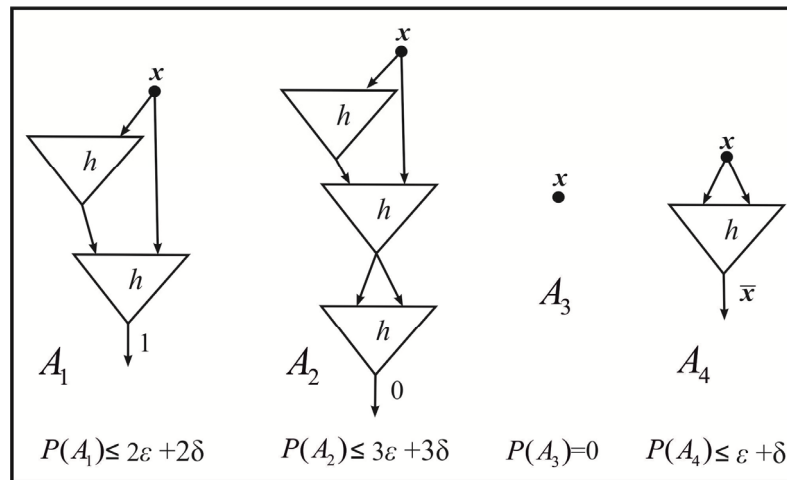


Рис. 2

Очевидно, что для $n=1$ теорема верна.

2. Пусть индукционное предположение верно для функций, зависящих от $(n-1)$ переменной. Докажем, что оно верно для функции $f(x_1, \dots, x_n)$, зависящей от n переменных. Разложим функцию f по переменной x_n :

$$f(x_1, \dots, x_n) = x_n f(x_1, \dots, x_{n-1}, 1) \vee \bar{x}_n f(x_1, \dots, x_{n-1}, 0)$$

$$= h(h(x_n, f(x_1, \dots, x_{n-1}, 1)), h(h(x_n, x_n), f(x_1, \dots, x_{n-1}, 0)))$$

и реализуем схемой S_2 (рис. 3), где схема S_1 реализует функцию $f_1 = f(x_1, \dots, x_{n-1}, 1)$, а схема S_0 реализует функцию $f_0 = f(x_1, \dots, x_{n-1}, 0)$.

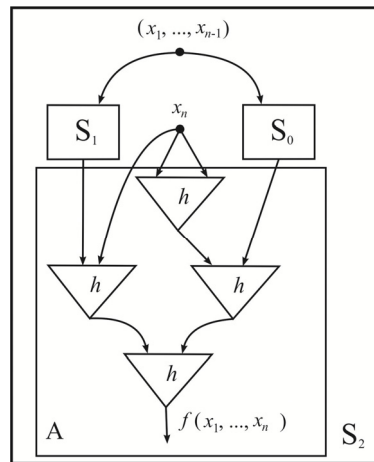


Рис. 3

В схеме S_2 выделим подсхему A , состоящую из четырех элементов (рис. 3), выход которой является выходом схемы S_2 , а на входы подаются значения переменной x_n и функций $f_1 = f(x_1, \dots, x_{n-1}, 1)$, $f_0 = f(x_1, \dots, x_{n-1}, 0)$.

Выделенная подсхема A состоит из четырех элементов, поэтому ее ненадежность $P(A) \leq 4\epsilon + 4\delta$. Функции $f_1 = f(x_1, \dots, x_{n-1}, 1)$ и $f_0 = f(x_1, \dots, x_{n-1}, 0)$ согласно индуктивному предположению можно реализовать схемами с ненадежностью не более $4\epsilon + 4\delta$. Если схема A исправна, то для реализации функции f она использует значение одной из схем, реализующих f_1 и f_0 . Поэтому $P(S_2) \leq P(A) + 4\epsilon + 4\delta \leq 8\epsilon + 8\delta$.

Уменьшим ненадежность схемы S_2 , используя схему $\psi(S_2)$, которая получается из $\psi(S)$ (см. рис. 1) заменой S на S_2 . Используя теорему 1, оценим ненадежность схемы $\psi(S_2)$:

$$P(\psi(S_2)) \leq \max \left\{ 3\epsilon + 3\delta + 2P^2(S_2)(1 + \tau_2) + 2\tau_2\delta, \epsilon + \delta + [\epsilon + \delta + 2P(S_2)(1 + \tau_2)]^2 \right\}.$$

Поскольку $P(S_2) \leq 8\epsilon + 8\delta$, получаем неравенство

$$P(\psi(S_2)) \leq \max \left\{ 3\epsilon + 3\delta + 2(8\epsilon + 8\delta)^2(1 + \tau_2) + 2\tau_2\delta, \right. \\ \left. \epsilon + \delta + [\epsilon + \delta + 2(8\epsilon + 8\delta)(1 + \tau_2)]^2 \right\}.$$

При $\epsilon \leq 1/260$, $\delta \leq 1/260$, $\tau_2 \leq 1/260$ имеем

$$3\epsilon + 3\delta + 2(8\epsilon + 8\delta)^2(1 + \tau_2) + 2\tau_2\delta \leq 3\epsilon + 3\delta + 128 \cdot 2/260(\epsilon + \delta)(1 + 1/260) + \\ + 2\delta/260 \leq 3\epsilon + 3\delta + 0,989(\epsilon + \delta) + 0,0077\delta \leq 4\epsilon + 4\delta;$$

$$\begin{aligned} \varepsilon + \delta + [\varepsilon + \delta + 2(8\varepsilon + 8\delta)(1 + \tau_2)]^2 &\leq \varepsilon + \delta + (\varepsilon + \delta)^2(1 + 16(1 + \tau_2))^2 \leq \\ &\leq \varepsilon + \delta + 2 / 260(\varepsilon + \delta)(17 + \tau_2)^2 \leq \varepsilon + \delta + 2 / 260(\varepsilon + \delta)(17 + 16 / 260)^2 \leq \\ &\leq \varepsilon + \delta + 2,24(\varepsilon + \delta) \leq 3,24(\varepsilon + \delta) \leq 4(\varepsilon + \delta). \end{aligned}$$

Таким образом, $P(\psi(S_2)) \leq 4\varepsilon + 4\delta$; $\psi(S_2) = C$ – искомая схема.

Теорема 2 доказана.

Теорема 3. Любую функцию f можно реализовать такой схемой D , что $P(D) \leq 3\varepsilon + 3\delta + 32 \cdot (3\varepsilon^2 + \delta^2) + 2\tau_2(48\varepsilon^2 + 17\delta)$ при всех $\varepsilon \leq 1/260$, $\delta \leq 1/260$, $\tau_2 \leq 1/260$ и τ_1 , удовлетворяющих условиям $\varepsilon + \delta \geq \tau_1 + \tau_2$ и $\tau_1 \leq \varepsilon$.

Доказательство. Согласно теореме 2 любую булеву функцию можно реализовать схемой C с ненадежностью $P(C) \leq 4\varepsilon + 4\delta$. По схеме C построим схему $\psi(C)$ (см. рис 1 и теорему 1) и оценим ее ненадежность:

$$\begin{aligned} P(\psi(C)) &\leq \max \left\{ 3\varepsilon + 3\delta + 2P^2(C)(1 + \tau_2) + 2\tau_2\delta, \varepsilon + \delta + [\varepsilon + \delta + 2P(C)(1 + \tau_2)]^2 \right\} \leq \\ &\leq \max \left\{ 3\varepsilon + 3\delta + 96\varepsilon^2 + 32\delta^2 + 96\varepsilon^2\tau_2 + 34\delta\tau_2, \varepsilon + 2\delta + 83\varepsilon^2 + 81\delta^2 + \delta\tau_2 \right\} = \\ &= 3\varepsilon + 3\delta + 32 \cdot (3\varepsilon^2 + \delta^2) + 2\tau_2(48\varepsilon^2 + 17\delta). \end{aligned}$$

Схема $\psi(C) = D$ – искомая схема. Теорема 3 доказана.

Заметим, что если $\varepsilon \rightarrow 0$, $\delta \rightarrow 0$, то $\tau_1 \rightarrow 0$, $\tau_2 \rightarrow 0$, поскольку $\varepsilon, \delta, \tau_1, \tau_2 \geq 0$ и $\tau_1 + \tau_2 \leq \varepsilon + \delta$.

Из теоремы 3 следует, что все булевы функции можно реализовать схемами, функционирующими с ненадежностью, асимптотически (при $\varepsilon \rightarrow 0$, $\delta \rightarrow 0$) не больше $3\varepsilon + 3\delta$.

3. Нижние оценки ненадежности схем

Возьмем произвольную булеву функцию $f(\tilde{x})$, отличную от констант и функций $x_1, x_2, \dots, x_n$. Пусть S – любая схема, реализующая $f(\tilde{x})$. В схеме S выделим подсхему A , содержащую выход схемы S . Пусть схема A реализует функцию $g(y_1, \dots, y_l)$ ($\hat{y} = (y_1, \dots, y_l)$), а $P(A)$ – ненадежность схемы A . Заметим, что функция g также отлична от константы.

Все входные наборы подсхемы A занумеруем следующим образом: пусть $\hat{b}_1, \dots, \hat{b}_m$ – все нулевые наборы функции g , $\hat{b}_{m+1}, \dots, \hat{b}_l$ – все единичные наборы функции g , $\hat{b}_{l+1}, \dots, \hat{b}_{2^l}$ – наборы, на которых функция g принимает значение *.

Рассмотрим наборы $\hat{b}_1, \dots, \hat{b}_m$. Обозначим: $p_{1,1}^0, \dots, p_{1,m}^0$ – соответственно вероятности появления 1 на выходе схемы A на этих наборах;

$p_{0,1}^0, \dots, p_{0,m}^0$ – соответственно вероятности появления 0 на выходе схемы A на этих наборах, $p_{*,1}^0, \dots, p_{*,m}^0$ соответственно вероятности появления * на выходе схемы A на этих наборах. Очевидно, что $p_{0,i}^0 = 1 - p_{1,i}^0 - p_{*,i}^0$ ($i \in \{1, \dots, m\}$).

Рассмотрим наборы $\hat{b}_{m+1}, \dots, \hat{b}_t$. Обозначим: $p_{1,m+1}^1, \dots, p_{1,t}^1$ – соответственно вероятности появления 1 на выходе схемы A на этих наборах; $p_{0,m+1}^1, \dots, p_{0,t}^1$ – соответственно вероятности появления 0 на выходе схемы A на этих наборах; $p_{*,m+1}^1, \dots, p_{*,t}^1$ – соответственно вероятности появления * на выходе схемы A на этих наборах. Очевидно, что $p_{1,j}^1 = 1 - p_{0,j}^1 - p_{*,j}^1$ ($j \in \{m+1, \dots, t\}$).

Рассмотрим наборы $\hat{b}_{t+1}, \dots, \hat{b}_{2^l}$. Обозначим $p_{1,t+1}^*, \dots, p_{1,2^l}^*$ – соответственно вероятности появления 1 на выходе схемы A на этих наборах; $p_{0,t+1}^*, \dots, p_{0,2^l}^*$ – соответственно вероятности появления 0 на выходе схемы A на этих наборах; $p_{*,t+1}^*, \dots, p_{*,2^l}^*$ – соответственно вероятности появления * на выходе схемы A на этих наборах. Очевидно, что $p_{*,j}^* = 1 - p_{0,j}^* - p_{1,j}^*$ ($j \in \{t+1, \dots, 2^l\}$). Полагаем

$$\mu_1 = \min_k \{p_{1,k}^0\}, \quad \mu_* = \min_k \{p_{*,k}^0\}, \quad M^0 = \max_k \{p_{1,k}^0 + p_{*,k}^0\}, \quad k \in \{1, \dots, m\};$$

$$\lambda_* = \min_k \{p_{*,k}^1\}, \quad \lambda_0 = \min_k \{p_{0,k}^1\}, \quad M^1 = \max_k \{p_{0,k}^1 + p_{*,k}^1\}, \quad k \in \{m+1, \dots, t\};$$

$$v_1 = \min_k \{p_{1,k}^*\}, \quad v_0 = \min_k \{p_{0,k}^*\}, \quad M^* = \max_k \{p_{0,k}^* + p_{1,k}^*\}, \quad k \in \{t+1, \dots, 2^l\}.$$

Замечание 1. Из определения ненадежности схемы следует, что $\lambda_* + \lambda_0 \leq M^1 \leq P(A)$, $\mu_* + \mu_1 \leq M^0 \leq P(A)$, $v_1 + v_0 \leq M^* \leq P(A)$.

Справедлива теорема 4.

Теорема 4. Пусть $f(\tilde{x})$ – произвольная функция, отличная от констант и функций $x_1, x_2, \dots, x_n$. Пусть S – любая схема, реализующая $f(\tilde{x})$. В схеме S выделим подсхему A , содержащую выход схемы S . Пусть схема A реализует функцию $g(y_1, \dots, y_l)$ ($\hat{y} = (y_1, \dots, y_l)$), а $P(A)$ – ненадежность схемы A , $P(A) \leq 1/2$. Тогда вероятности ошибок на выходе схемы S удовлетворяют неравенствам: $P_{f(\tilde{a}) \neq 0}(S, \tilde{a}) \geq \mu_1 + \mu_*$, если $\tilde{a}$ – нулевой набор функции f ; $P_{f(\tilde{a}) \neq 1}(S, \tilde{a}) \geq \lambda_0 + \lambda_*$, если $\tilde{a}$ – единичный набор функции f .

Доказательство. Пусть $\tilde{a}$ – нулевой набор функции f , т.е. $f(\tilde{a}) = 0$. Обозначим через $P_0(A, \hat{b})$ вероятность появления на входах схемы A нулевого для функции g набора $\hat{b}$ (т.е. $g(\hat{b}) = 0$); $P_1(A, \hat{b})$ – вероятность появления

на входах схемы A единичного для функции g набора $\hat{b}$ (т.е. $g(\hat{b})=1$); $P_*(A, \hat{b})$ – вероятность появления такого набора $\hat{b}$ на входах схемы A , что при отсутствии неисправностей в схеме A на ее выходе получим $g(\hat{b})=*$. Тогда вероятность появления единицы на выходе схемы S удовлетворяет неравенству

$$\begin{aligned} P_1(S, \tilde{a}) &\geq (1 - P_1(A, \hat{b}) - P_*(A, \hat{b}))\mu_1 + P_1(A, \hat{b})(1 - M^1) + P_*(A, \hat{b})v_1 = \\ &= \mu_1 + P_1(A, \hat{b})(1 - M^1 - \mu_1) + P_*(A, \hat{b})(v_1 - \mu_1). \end{aligned}$$

Вероятность появления значения $*$ на выходе схемы S найдем по формуле полной вероятности:

$$\begin{aligned} P_*(S, \tilde{a}) &\geq (1 - P_1(A, \hat{b}) - P_*(A, \hat{b}))\mu_* + P_1(A, \hat{b})\lambda_* + P_*(A, \hat{b})(1 - M^*) = \\ &= \mu_* + P_1(A, \hat{b})(\lambda_* - \mu_*) + P_*(A, \hat{b})(1 - M^* - \mu_*). \end{aligned}$$

Тогда вероятность ошибки на выходе схемы S удовлетворяет неравенству

$$\begin{aligned} P_{f(\tilde{a}) \neq 0}(S, \tilde{a}) &= P_1(S, \tilde{a}) + P_*(S, \tilde{a}) \geq \mu_1 + \mu_* + P_1(A, \hat{b})(1 - M^1 - \mu_1 - \mu_*) + P_*(A, \hat{b}) \times \\ &\times (1 - M^* - \mu_1 - \mu_*) \geq \mu_1 + \mu_* + P_1(A, \hat{b})(1 - 2P(A)) + P_*(A, \hat{b})(1 - 2P(A)) \geq \mu_1 + \mu_*, \end{aligned}$$

поскольку $\mu_1 + \mu_* \leq P(A)$, $M^1 \leq P(A)$, $M^* \leq P(A)$ (см. замечание 1) и по условию $P(A) \leq 1/2$.

Пусть $\tilde{a}$ – единичный набор функции f , т.е. $f(\tilde{a})=1$.

Вероятность появления нуля на выходе схемы S удовлетворяет неравенству

$$\begin{aligned} P_0(S, \tilde{a}) &\geq P_0(A, \hat{b})(1 - M^0) + (1 - P_0(A, \hat{b}) - P_*(A, \hat{b}))\lambda_0 + P_*(A, \hat{b})v_0 = \\ &= \lambda_0 + P_0(A, \hat{b})(1 - M^0 - \lambda_0) + P_*(A, \hat{b})(v_0 - \lambda_0). \end{aligned}$$

Вероятность появления значения $*$ на выходе схемы S найдем по формуле полной вероятности:

$$\begin{aligned} P_*(S, \tilde{a}) &\geq P_0(A, \hat{b})\mu_* + (1 - P_0(A, \hat{b}) - P_*(A, \hat{b}))\lambda_* + P_*(A, \hat{b})(1 - M^*) = \\ &= \lambda_* + P_0(A, \hat{b})(\mu_* - \lambda_*) + P_*(A, \hat{b})(1 - M^* - \lambda_*). \end{aligned}$$

Тогда вероятность ошибки на выходе схемы S удовлетворяет неравенству

$$\begin{aligned} P_{f(\tilde{a}) \neq 1}(S, \tilde{a}) &= P_0(S, \tilde{a}) + P_*(S, \tilde{a}) \geq \lambda_0 + \lambda_* + P_0(A, \hat{b})(1 - M^0 - \lambda_0 - \lambda_*) + \\ &+ P_*(A, \hat{b})(1 - M^* - \lambda_0 - \lambda_*) \geq \lambda_0 + \lambda_* + P_0(A, \hat{b})(1 - 2P(A)) + \\ &+ P_*(A, \hat{b})(1 - 2P(A)) \geq \lambda_0 + \lambda_*, \end{aligned}$$

поскольку $\lambda_0 + \lambda_* \leq P(A)$, $M^0 \leq P(A)$, $M^* \leq P(A)$ (см. замечание 1) и по условию $P(A) \leq 1/2$.

Теорема 4 доказана.

Следствие 1. Если условия теоремы 4 выполнены, то $P(S) \geq \max\{\mu_1 + \mu_*, \lambda_0 + \lambda_*\}$.

Пусть $K(n)$ – множество булевых функций $f(x_1, \dots, x_n)$, не представимых в виде $(x_i^a \& g(\tilde{x}))^b$ ($i = 1, 2, \dots, n$, $a, b \in \{0, 1\}$, $n \geq 3$). Обозначим $K = \bigcup_{n=3}^{\infty} K(n)$.

Например, функции $x_1 \sim x_2 \cdot x_3$, $x_1 \oplus x_2 \oplus x_3$ принадлежат множеству K , а функции $0, 1, x_1, \bar{x}_1, \bar{x}_1 \cdot (x_2 \vee x_3)$ не принадлежат множеству K .

Теорема 5. Пусть функция $f \in K$, и пусть S – любая схема, реализующая функцию f . Тогда $P(S) \geq 3\varepsilon + 3\delta + \varphi(\varepsilon, \delta, \tau_1, \tau_2)$, где $\varphi(\varepsilon, \delta, \tau_1, \tau_2) = -13\varepsilon\delta - 5\delta^2 - 11\varepsilon^2 - 3\delta\tau_2 - 2\delta\tau_1 - 2\varepsilon\tau_1$ при всех $\varepsilon, \delta, \tau_1, \tau_2$, удовлетворяющих условиям $\varepsilon + \delta \leq 1/8$, $\varepsilon + \delta \geq \tau_1 + \tau_2$ и $\tau_1 \leq \varepsilon$.

Доказательство. Пусть функция $f \in K$, а S – произвольная схема, реализующая f . Выделим в схеме S функциональный элемент E_1 , выход которого является выходом схемы S . Поскольку функция $f \in K$, для ее реализации потребуется не меньше трех элементов. Возможны следующие варианты.

1. Входы элемента E_1 соединены с выходами разных элементов E_2 и E_3 (рис. 4).

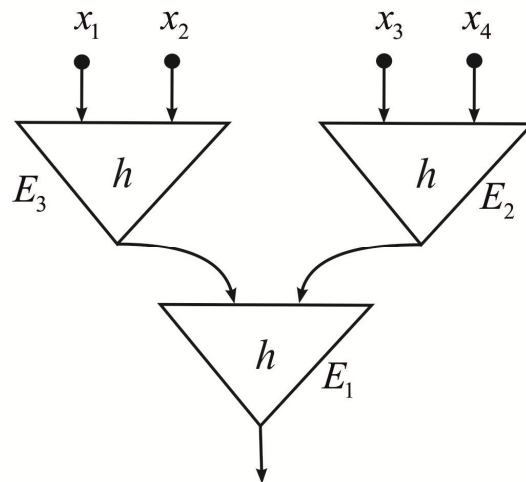


Рис. 4

Обозначим через A схему, состоящую из трех элементов E_1, E_2, E_3 . Очевидно, что $P(A) \leq 3(\varepsilon + \delta)$. Поскольку $\varepsilon + \delta \leq 1/8$, получаем неравенство $P(A) \leq 1/2$. Вычислим вероятность $P_1(A, \tilde{c})$ появления 1 на выходе схемы A при нулевых входных наборах $\tilde{c} = (c_1, c_2, c_3, c_4)$ (т.е. $c_1 c_2 = c_3 c_4 = 0$):

$$\begin{aligned}
 P_1(A, \tilde{c}) = \mu_1 = & P_0(E_2, (c_3, c_4))P_0(E_3, (c_1, c_2))(1 - \varepsilon - \delta) + P_1(E_2, (c_3, c_4)) \times \\
 & \times P_0(E_3, (c_1, c_2))(1 - \varepsilon - \delta) + P_0(E_2)P_1(E_3, (c_1, c_2))(1 - \varepsilon - \delta) + \\
 & + P_1(E_2, (c_3, c_4))P_1(E_3, (c_1, c_2))\varepsilon + P_*(E_2, (c_3, c_4))P_0(E_3, (c_1, c_2))(1 - \varepsilon - \delta) + \\
 & + P_0(E_2, (c_3, c_4))P_*(E_3, (c_1, c_2))(1 - \varepsilon - \delta) + P_1(E_2, (c_3, c_4))P_*(E_3, (c_1, c_2))\tau_2 + \\
 & + P_*(E_2, (c_3, c_4))P_1(E_3, (c_1, c_2))\tau_2 + P_*(E_2, (c_3, c_4))P_*(E_3, (c_1, c_2))\tau_2.
 \end{aligned}$$

Поскольку

$$P_1(E_2, (c_3, c_4)) = 1 - P_0(E_2, (c_3, c_4)) - P_*(E_2, (c_3, c_4)); \quad (7)$$

$$P_1(E_3, (c_1, c_2)) = 1 - P_0(E_3, (c_1, c_2)) - P_*(E_3, (c_1, c_2)); \quad (8)$$

$$P_0(E_2, (c_3, c_4)) = P_0(E_3, (c_1, c_2)) = \varepsilon; \quad (9)$$

$$P_*(E_2, (c_3, c_4)) = P_*(E_3, (c_1, c_2)) = \delta, \quad (10)$$

получаем равенство

$$\mu_1 = P_1(A, \tilde{c}) = (1 - \varepsilon - \delta)(2\varepsilon - \varepsilon^2) + (1 - \varepsilon - \delta)^2\varepsilon + \tau_2(2\delta - 2\varepsilon\delta - \delta^2).$$

Вероятность $P_*(A, \tilde{c})$ появления * при нулевых входных наборах $\tilde{c}$ на выходе схемы A равна:

$$\begin{aligned}
 P_*(A, \tilde{c}) = \mu_* = & P_0(E_2, (c_3, c_4))P_0(E_3, (c_1, c_2))\delta + P_1(E_2, (c_3, c_4))P_0(E_3, (c_1, c_2))\delta + \\
 & + P_0(E_2, (c_3, c_4))P_1(E_3, (c_1, c_2))\delta + P_1(E_2, (c_3, c_4))P_1(E_3, (c_1, c_2))\delta + \\
 & + P_*(E_2, (c_3, c_4))P_0(E_3, (c_1, c_2))\delta + P_0(E_2, (c_3, c_4))P_*(E_3, (c_1, c_2))\delta + \\
 & + P_1(E_2, (c_3, c_4))P_*(E_3, (c_1, c_2))(1 - \tau_1 - \tau_2) + P_*(E_2, (c_3, c_4))P_1(E_3, (c_1, c_2)) \times \\
 & \times (1 - \tau_1 - \tau_2) + P_*(E_2, (c_3, c_4))P_*(E_3, (c_1, c_2))(1 - \tau_1 - \tau_2).
 \end{aligned}$$

Поскольку выполняются соотношения (7)–(10), получаем равенство

$$\mu_* = P_*(A, \tilde{c}) = \delta(1 - 2\delta + \delta^2 + 2\varepsilon\delta) + (1 - \tau_1 - \tau_2)(2\delta - \delta^2 - 2\varepsilon\delta).$$

Тогда

$$P_{f \neq 0}(A, \tilde{c}) = P_1(A, \tilde{c}) + P_*(A, \tilde{c}) = \mu_1 + \mu_* = 3\varepsilon + 3\delta + \varphi_1(\varepsilon, \delta, \tau_1, \tau_2),$$

где $\varphi_1(\varepsilon, \delta, \tau_1, \tau_2) = 2\varepsilon^3 - 5\varepsilon^2 - 6\varepsilon\delta + 3\varepsilon^2\delta + 3\varepsilon\delta^2 - 3\delta^2 + \delta^3 - 2\delta\tau_1 + 2\varepsilon\delta\tau_1 + \delta^2\tau_1$.

Поскольку $P(A) \leq 1/2$, по следствию 1 имеем $P(S) \geq \mu_1 + \mu_* = P_{f \neq 0}(A, \tilde{c}) = 3\varepsilon + 3\delta + \varphi_1(\varepsilon, \delta, \tau_1, \tau_2)$, т.е. $P(S) \geq 3\varepsilon + 3\delta + \varphi_1(\varepsilon, \delta, \tau_1, \tau_2)$.

2. Входы элемента E_1 соединены с выходом одного элемента E_2 . Возможны два случая.

2.1. Входы элемента E_2 соединены с выходами разных элементов E_3 и E_4 (рис. 5). Обозначим через U подсхему схемы S , состоящую из элементов

E_2 , E_3 и E_4 , а через A – подсхему, состоящую из четырех элементов E_1 , E_2 , E_3 и E_4 . Очевидно, что $P(A) \leq 4(\varepsilon + \delta)$. Поскольку $\varepsilon + \delta \leq 1/8$, получаем неравенство $P(A) \leq 1/2$. Вычислим вероятности $P_0(A, \bar{c})$ и $P_*(A, \bar{c})$ появления соответственно значений 0 и * на выходе схемы A при единичных входных наборах $\bar{c} = (c_1, c_2, c_3, c_4)$ (т.е. $c_1 c_2 = c_3 c_4 = 0$):

$$P_0(A, \bar{c}) = \lambda_0 = (1 - P_1(U, \bar{c}) - P_*(U, \bar{c}))\varepsilon + P_1(U, \bar{c})(1 - \varepsilon - \delta) + P_*(U, \bar{c})\tau_1,$$

$$P_*(A, \bar{c}) = \lambda_* = (1 - P_1(U, \bar{c}) - P_*(U, \bar{c}))\delta + P_1(U, \bar{c})\delta + P_*(U, \bar{c})(1 - \tau_1 - \tau_2).$$

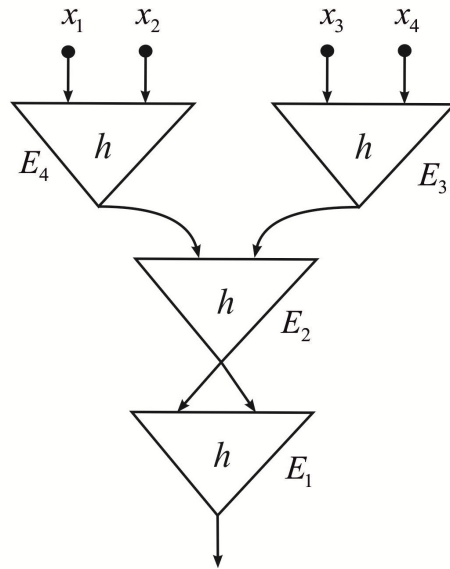


Рис. 5

Учитывая, что выражения для $P_1(U, \bar{c})$ и $P_*(U, \bar{c})$ были получены в пункте 1 этого доказательства, имеем

$$P_{f \neq 1}(A, \bar{c}) = P_0(A, \bar{c}) + P_*(A, \bar{c}) = \lambda_0 + \lambda_* = 4\varepsilon + 4\delta + \varphi_2(\varepsilon, \delta, \tau_1, \tau_2),$$

где

$$\begin{aligned} \varphi_2(\varepsilon, \delta, \tau_1, \tau_2) = & -2\varepsilon\delta\tau_1\tau_2 - 12\varepsilon\delta + 18\varepsilon^2\delta + 8\varepsilon\delta^2 + \delta^2\tau_2 - 2\delta\tau_1 + 3\delta^2\tau_1 - 8\varepsilon^3\delta - \\ & - 5\varepsilon^2\delta^2 - \varepsilon\delta^3 - \delta^3\tau_1 + 2\delta\tau_2^2 - \delta^2\tau_2^2 - 3\delta\tau_2 + 4\varepsilon\delta\tau_1 - 2\varepsilon^2\delta\tau_1 - 3\varepsilon\delta^2\tau_1 + 2\varepsilon^2\delta\tau_2 + \\ & + \varepsilon\delta^2\tau_2 + 2\delta\tau_1\tau_2 - \delta^2\tau_1\tau_2 - 2\varepsilon\delta\tau_2^2 + 12\varepsilon^3 - 4\varepsilon^4 + \delta^3 - 11\varepsilon^2 - 4\delta^2. \end{aligned}$$

Поскольку $P(A) \leq 1/2$, применимо следствие 1 из теоремы 4. Поэтому $P(S) \geq \lambda_0 + \lambda_* = P_{f \neq 1}(A, \bar{c}) = 4\varepsilon + 4\delta + \varphi_2(\varepsilon, \delta, \tau_1, \tau_2)$, т.е. получаем неравенство $P(S) \geq 4\varepsilon + 4\delta + \varphi_2(\varepsilon, \delta, \tau_1, \tau_2)$.

2.2. Оба входа элемента E_2 соединены с выходом одного элемента E_3 (рис. 6). Обозначим через U подсхему, состоящую из элементов E_3 и E_2 , а че-

рез A – подсхему, состоящую из элементов E_1, E_2, E_3 . Очевидно, что $P(A) \leq 3(\varepsilon + \delta)$. Поскольку $\varepsilon + \delta \leq 1/8$, получаем неравенство $P(A) \leq 1/2$. Вычислим вероятности $P_0(U, \tilde{c})$ и $P_*(U, \tilde{c})$ появления соответственно значений 0 и * на выходе схемы U при единичных входных наборах $\tilde{c} = (c_1, c_2)$ (т.е. $c_1 c_2 = 1$):

$$\begin{aligned} P_0(U, \tilde{c}) &= (1 - P_1(E_3, \tilde{c}) - P_*(E_3, \tilde{c}))\varepsilon + P_1(E_3, \tilde{c})(1 - \varepsilon - \delta) + P_*(E_3, \tilde{c})\tau_1 = \\ &= 2\varepsilon(1 - \varepsilon - \delta) + \delta\tau_1; \\ P_*(U, \tilde{c}) &= (1 - P_1(E_3, \tilde{c}) - P_*(E_3, \tilde{c}))\delta + P_1(E_3, \tilde{c})\delta + P_*(E_3, \tilde{c})(1 - \tau_1 - \tau_2) = \\ &= \delta(2 - \delta - \tau_1 - \tau_2). \end{aligned}$$

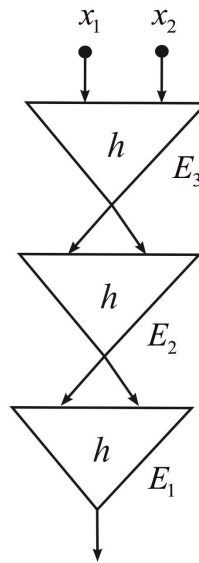


Рис. 6

Вероятность появления $P_1(A, \tilde{c})$ и $P_*(A, \tilde{c})$ на нулевых входных наборах $\tilde{c} = (c_1, c_2)$ (т.е. $c_1 c_2 = 1$) на выходе схемы A равна

$$\begin{aligned} P_1(A, \tilde{c}) &= \mu_1 = P_0(U, \tilde{c})(1 - \varepsilon - \delta) + (1 - P_0(U, \tilde{c}) - P_*(U, \tilde{c}))\varepsilon + P_*(U, \tilde{c})\tau_2; \\ P_*(A, \tilde{c}) &= \mu_* = P_0(U, \tilde{c})\delta + (1 - P_0(U, \tilde{c}) - P_*(U, \tilde{c}))\delta + P_*(U, \tilde{c})(1 - \tau_1 - \tau_2). \end{aligned}$$

Учитывая выражения для $P_1(U, \tilde{c})$ и $P_*(U, \tilde{c})$, имеем

$$\begin{aligned} P_{f \neq 0}(A, \tilde{c}) &= \mu_1 + \mu_* = P_1(A, \tilde{c}) + P_*(A, \tilde{c}) = P_0(U, \tilde{c})(1 - \varepsilon - \delta) + (1 - P_0(U, \tilde{c}) - \\ &- P_*(U, \tilde{c}))\varepsilon + P_*(U, \tilde{c})\tau_2 + P_0(U, \tilde{c})\delta + (1 - P_0(U, \tilde{c}) - P_*(U, \tilde{c}))\delta + \\ &+ P_*(U, \tilde{c})(1 - \tau_1 - \tau_2) = 3\varepsilon + 3\delta + \varphi_3(\varepsilon, \delta, \tau_1, \tau_2), \end{aligned}$$

$$\varphi_3(\varepsilon, \delta, \tau_1, \tau_2) = 3\varepsilon\delta^2 - 2\varepsilon\tau_1 - 6\varepsilon^2 - 6\varepsilon\delta + 6\varepsilon^2\delta - 3\delta^2 - \delta\tau_2 + \delta^2\tau_2 +$$

$$+\delta^2\tau_1+\delta\tau_1^2-\varepsilon\delta\tau_1+\varepsilon\delta\tau_2+\delta\tau_1\tau_2+b^3+4\varepsilon^3.$$

Поскольку $P(A) \leq 1/2$, применимо следствие 1 из теоремы 4. Поэтому $P(S) \geq \mu_1 + \mu_* = P_{f \neq 1}(A, \bar{c}) = 3\varepsilon + 3\delta + \varphi_3(\varepsilon, \delta, \tau_1, \tau_2)$, т.е. получаем неравенство $P(S) \geq 3\varepsilon + 3\delta + \varphi_3(\varepsilon, \delta, \tau_1, \tau_2)$.

3. Один из входов элемента E_2 соединен с выходом элемента E_3 , входы элемента E_1 соединены с выходами разных элементов E_2 и E_3 (см. рис. 6). Обозначим через A – подсхему, состоящую из элементов E_1, E_2, E_3 . Очевидно, что $P(A) \leq 3(\varepsilon + \delta)$. Поскольку $\varepsilon + \delta \leq 1/8$, получаем неравенство $P(A) \leq 1/2$. Вычислим вероятности $P_1(A, \bar{c})$ и $P_*(A, \bar{c})$ появления 1 и * на выходе схемы A при нулевых входных наборах $\bar{c} = (c_1, c_2, c_3)$ (т.е. $c_1 c_2 = c_3 = 0$):

$$P_1(A, \bar{c}) = \mu_1 = 3\varepsilon(1 - \varepsilon - \delta)^2 + \varepsilon^2(1 - \varepsilon - \delta) + 2\delta\varepsilon(1 - \varepsilon - \delta) + \delta^2\tau_2 + 2(1 - \varepsilon - \delta)\delta\tau_2;$$

$$P_*(A, \bar{c}) = \mu_* = \delta(1 - \varepsilon - \delta)^2 + 2\varepsilon\delta(1 - \varepsilon - \delta) + \varepsilon^2\delta + \\ + 2\varepsilon\delta^2 + 2(1 - \varepsilon - \delta)(1 - \tau_1 - \tau_2) + \delta^2(1 - \tau_1 - \tau_2).$$

Тогда вероятность ошибки на выходе схемы A равна

$$P_{f \neq 0}(A, \bar{c}) = P_1(A, \bar{c}) + P_*(A, \bar{c}) = \mu_1 + \mu_* = 3\varepsilon + 3\delta + \varphi_4(\varepsilon, \delta, \tau_1, \tau_2),$$

где $\varphi_4(\varepsilon, \delta, \tau_1, \tau_2) = 2\varepsilon^3 - 5\varepsilon^2 - 6\varepsilon\delta + 3\varepsilon^2\delta + 3\varepsilon\delta^2 - 3\delta^2 + \delta^3 - 2\delta\tau_1 + 2\varepsilon\delta\tau_1 + \delta^2\tau_1$.

Нетрудно проверить, что $\varphi_4(\varepsilon, \delta, \tau_1, \tau_2) = \varphi_1(\varepsilon, \delta, \tau_1, \tau_2)$.

Поскольку $P(A) \leq 1/2$, по следствию 1 имеем $P(S) \geq \mu_1 + \mu_* = P_{f \neq 0}(A, \bar{c}) = 3\varepsilon + 3\delta + \varphi_1(\varepsilon, \delta, \tau_1, \tau_2)$, т.е. $P(S) \geq 3\varepsilon + 3\delta + \varphi_1(\varepsilon, \delta, \tau_1, \tau_2)$.

Таким образом, во всех случаях справедливо неравенство $P(S) \geq 3\varepsilon + 3\delta + \varphi(\varepsilon, \delta, \tau_1, \tau_2)$, где $\varphi(\varepsilon, \delta, \tau_1, \tau_2)$ – любая функция, удовлетворяющая условию $\varphi(\varepsilon, \delta, \tau_1, \tau_2) \leq \min\{\varphi_1(\varepsilon, \delta, \tau_1, \tau_2), \varphi_2(\varepsilon, \delta, \tau_1, \tau_2), \varphi_3(\varepsilon, \delta, \tau_1, \tau_2)\}$.

Например, в качестве функции $\varphi(\varepsilon, \delta, \tau_1, \tau_2)$ можно взять

$$\varphi(\varepsilon, \delta, \tau_1, \tau_2) = -13\varepsilon\delta - 5\delta^2 - 11\varepsilon^2 - 3\delta\tau_2 - 2\delta\tau_1 - 2\varepsilon\tau_1.$$

Действительно, сначала найдем вспомогательную функцию $\varphi'(\varepsilon, \delta, \tau_1, \tau_2)$, сравнивая коэффициенты функций φ_i ($i \in \{1, 2, 3\}$) в подобных слагаемых и выбирая наименьший коэффициент. Тогда

$$\varphi'(\varepsilon, \delta, \tau_1, \tau_2) = -2\varepsilon\delta\tau_1\tau_2 - 12\varepsilon\delta + 3\varepsilon^2\delta + 3\varepsilon\delta^2 - 2\delta\tau_1 + \delta^2\tau_1 - 8\varepsilon^3\delta - \\ - 5\varepsilon^2\delta^2 - \varepsilon\delta^3 - \delta^3\tau_1 - \delta^2\tau_2^2 - 3\delta\tau_2 - \varepsilon\delta\tau_1 - 2\varepsilon^2\delta\tau_1 - 3\varepsilon\delta^2\tau_1 - \delta^2\tau_1\tau_2 - \\ - 2\varepsilon\delta\tau_2^2 + 2\varepsilon^3 - 4\varepsilon^4 + \delta^3 - 11\varepsilon^2 - 4\delta^2 - 2\varepsilon\tau_1.$$

Поскольку $\varepsilon + \delta \leq 1/8$ и $\tau_1 + \tau_2 \leq \varepsilon + \delta$, получаем $\varepsilon \leq 1/8$, $\delta \leq 1/8$, $\tau_1 \leq 1/8$, $\tau_2 \leq 1/8$. Учитывая эти оценки, легко проверить, следующее:

$$1) \ 3\varepsilon\delta^2 - \varepsilon\delta^3 = \varepsilon\delta^2(3 - \delta) \geq 0;$$

$$2) \delta^3 - \delta^3 \tau_1 = \delta^3 (1 - \tau_1) \geq 0;$$

$$3) 3\epsilon^2 \delta - 2\epsilon^2 \delta \tau_1 - 5\epsilon^2 \delta^2 \geq 3\epsilon^2 \delta - \frac{2}{8}\epsilon^2 \delta - \frac{5}{8}\epsilon^2 \delta = \frac{17}{8}\epsilon^2 \delta \geq 0;$$

$$4) \delta^2 \tau_1 - 3\epsilon \delta^2 \tau_1 - \delta^2 \tau_1 \tau_2 \geq \delta^2 \tau_1 - \frac{3}{8}\delta^2 \tau_1 - \frac{1}{8}\delta^2 \tau_1 = \frac{1}{2}\delta^2 \tau_1 \geq 0;$$

$$5) 2\epsilon^3 - 4\epsilon^4 - 8\epsilon^3 \delta = (\epsilon^3 - 4\epsilon^4) + (\epsilon^3 - 8\epsilon^3 \delta) = \epsilon^3 (1 - 4\epsilon) + \epsilon^3 (1 - 8\delta) \geq 0.$$

Отбрасывая эти неотрицательные выражения, получим неравенства:

$$\begin{aligned} \varphi'(\epsilon, \delta, \tau_1, \tau_2) \geq \varphi''(\epsilon, \delta, \tau_1, \tau_2) = & -2\epsilon \delta \tau_1 \tau_2 - 12\epsilon \delta - 2\delta \tau_1 - \\ & -\delta^2 \tau_2^2 - 3\delta \tau_2 - \epsilon \delta \tau_1 - 2\epsilon \delta \tau_2^2 - 11\epsilon^2 - 4\delta^2 - 2\epsilon \tau_1; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi''(\epsilon, \delta, \tau_1, \tau_2) \geq & -\frac{2}{64}\epsilon \delta - 12\epsilon \delta - 2\delta \tau_1 - \frac{1}{64}\delta^2 - 3\delta \tau_2 - \frac{1}{8}\epsilon \delta - \frac{2}{64}\epsilon \delta - 11\epsilon^2 - \\ & -4\delta^2 - 2\epsilon \tau_1 \geq -13\epsilon \delta - 5\delta^2 - 11\epsilon^2 - 3\delta \tau_2 - 2\delta \tau_1 - 2\epsilon \tau_1 = \varphi(\epsilon, \delta, \tau_1, \tau_2). \end{aligned}$$

Теорема 5 доказана.

Заключение

Из теоремы 3 следует, что любую булеву функцию можно реализовать схемой, функционирующей с ненадежностью, асимптотически (при $\epsilon \rightarrow 0$, $\delta \rightarrow 0$) не больше $3\epsilon + 3\delta$.

Из теоремы 5 следует, что функции класса K (содержащего почти все булевы функции) нельзя реализовать схемами с ненадежностью, асимптотически (при $\epsilon \rightarrow 0$, $\delta \rightarrow 0$) меньше $3\epsilon + 3\delta$.

Таким образом, почти все булевы функции можно реализовать схемами с ненадежностью, асимптотически равной $3\epsilon + 3\delta$ (при $\epsilon \rightarrow 0$, $\delta \rightarrow 0$).

Список литературы

1. Лупанов, О. Б. Асимптотические оценки сложности управляющих систем / О. Б. Лупанов. – М. : Изд-во Моск. ун-та, 1984. – 138 с.
2. Яблонский С. В. Введение в дискретную математику / С. В. Яблонский. – М. : Наука, 1986. – 384 с.
3. Алехина М. А. Синтез асимптотических оптимальных по надежности схем / М. А. Алехина. – Пенза : Инф.-изд. центр ПензГУ, 2006. – 156 с.

References

1. Lupanov O. B. *Asimptoticheskie otsenki slozhnosti upravlyayushchikh sistem* [Asymptotical estimate of control system complexity]. Moscow: Izd-vo Mosk. un-ta, 1984, 138 p.
2. Yablonskiy S. V. *Vvedenie v diskretnuyu matematiku* [Introduction into discrete mathematics]. Moscow: Nauka, 1986, 384 p.
3. Alekhina M. A. *Sintez asimptoticheskikh optimal'nykh po nadezhnosti skhem* [Synthesis of of asymptotical safety-optimal circuits]. Penza: Inf.-izd. center PenzGU, 2006, 156 p.

Алехина Марина Анатольевна

доктор физико-математических наук,
профессор, заведующая кафедрой
дискретной математики, Пензенский
государственный университет
(Россия, г. Пенза, ул. Красная, 40)

E-mail: dm@pnzgu.ru

Alekhina Marina Anatol'evna

Doctor of physical and mathematical
sciences, professor, head of sub-department
of discrete mathematics, Penza State
University (40 Krasnaya street,
Penza, Russia)

Барсукова Оксана Юрьевна

аспирант, Пензенский государственный
университет (Россия, г. Пенза,
ул. Красная, 40)

E-mail: dm@pnzgu.ru

Barsukova Oksana Yurievna

Postgraduate student, Penza State
University (40 Krasnaya street,
Penza, Russia)

УДК 519.718

Алехина, М. А.

О ненадежности схем из функциональных элементов, подверженных двум типам неисправностей / М. А. Алехина, О. Ю. Барсукова // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2013. – № 3 (27). – С. 31–47.